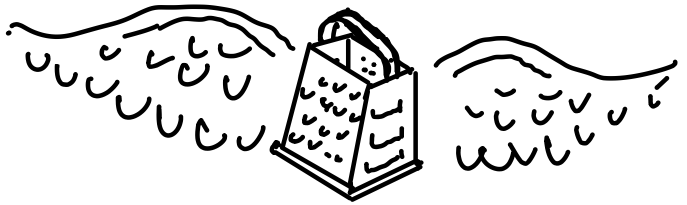
Infos : ◇ Séances du soir commencent cette semaine

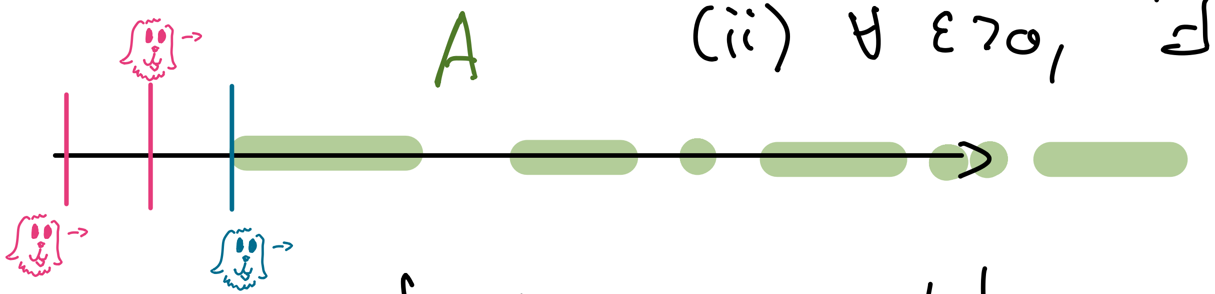
◇ À propos des séries en 2 versions ◇ Mercredi, STCC indispo → Vidéo.



◇ inf A est le plus grand minorant :

$x = \inf A \iff$ (i) $\forall a \in A,\ x \leq a$ (x est un minorant)

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A$ tq $a \leq x + \varepsilon$ (Il n'y a pas de minorant plus grand)



◇ sup A est le plus petit majorant

$x = \sup A \iff$ (i) $\forall a \in A,\ x \geq a$ (x est un majorant)

(ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A$ tq $x - \varepsilon \leq a$ (Il n'y a pas de majorant plus petit)

Exemple 1.12

(i) $A = \mathbb{N}$, $\inf \mathbb{N} = 0$

Am : (i) $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leq n$ (déjà fait)

(ii) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq $n \leq 0 + \varepsilon$

(ii) Soit $\varepsilon > 0$, posons $n = 0 \in \mathbb{N}$. Alors, $n = 0 < \varepsilon$

$\Rightarrow n \leq \varepsilon$.

ε étant quelconque, on a le résultat

(ii) Soit $A =]-\infty, 1[= \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

$\sup A = 1$ Am : (a) $\forall a \in A$, $a \leq 1$

Soit $a \in A$ quelconque. Alors, $a < 1$, en particulier $a \leq 1$

a étant quelconque, on a le résultat voulu

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists a \in A$ tq $a \geq 1 - \varepsilon$

Recherche de preuve : De quoi j'ai besoin pour $a \in A$?

$$\begin{cases} a \in A \\ a \geq 1-\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a < 1 \\ a \geq 1-\varepsilon \end{matrix} \Leftrightarrow 1-\varepsilon \leq a < 1$$

milieu entre $1-\varepsilon$ et 1

(milieu de x et y est $\frac{x+y}{2}$)

$$\frac{1-\varepsilon+1}{2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Preuve de (b) : Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Posons $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors, vu que $\varepsilon/2 > 0$, $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2} < 1 \Rightarrow a \in A$.

De plus, $a = 1 - \frac{\varepsilon}{2} > 1 - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = 1 - \varepsilon$

En particulier $a \geq 1 - \varepsilon$

$\blacksquare$

$\varepsilon = \frac{1}{10}, \quad a = 0, \qquad 0 < 1 - \varepsilon = \frac{9}{10}$

Proposition 1.13

Soit $A \subseteq B$, $A \neq \emptyset$. Alors

(i) Si B est minoré, $\inf A \geq \inf B$ ("inf est décroissante")

(ii) Si B est majoré, $\sup A \leq \sup B$ ("sup est croissante")

Définition 1.14 minimum, maximum

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$

(i) On dit que A admet un minimum si $\exists m \in A$ tq $\forall a \in A$, $m \leq a$. On note alors $m = \min A$

(ii) On dit que A admet un maximum si $\exists M \in A$ tq $\forall a \in A$ $a \leq M$

Remarque 1.15 : (i) On peut reformuler : A admet un max (resp. min) si un élément de A est un majorant

(resp. minorant)

(ii) On peut voir que A admet un maximum (resp. min) si et seulement si $\sup A \in A$ (resp. $\inf A \in A$) on a alors $\sup A = \max A$ (resp. $\inf A = \min A$)

(iii) Un ensemble fini (i.e. un ensemble qui contient un nombre fini d'éléments) a toujours un max (le plus grand des éléments) et un min (le plus petit des éléments)

(iv) Un sous ensemble de $\mathbb{N}$ a toujours un minimum

($\mathbb{N}$ est <u>bien ordonné</u>)

Example 1.16

(i) On a $\min \mathbb{N} = 0$, on a vu que $0 \in \mathbb{N}$ et on a $\inf \mathbb{N} = 0$

$\Rightarrow 0 = \inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N}$

(ii) Soit $A = \{a \in \mathbb{R} : a < 1\} =]-\infty, 1[$. Alors, A n'admet pas de maximum. En effet, on a vu que $\sup A = 1$ & $1 \notin A$

Notation 1.17

Soit $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

(i) Si A n'est pas minoré, on écrit $\inf A = -\infty$

Notation qui veut dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists a \in A$ tq $a < x$.

(ii) si A n'est pas majoré, on écrit $\sup A = +\infty$.

Remarque 1.18 :

Le fait d'écrire $\sup A = +\infty$ (resp. $\inf A = -\infty$) ne veut pas dire que le suprémum (resp. infimum) de A existe.

Exemples 1.19 $a, b \in \mathbb{R}$

$I = [a, \ldots \rightsquigarrow \inf I = \min I = a$

$I =]a, \ldots \rightsquigarrow \inf I = a$, pas de minimum

$I = \ldots, b] \rightsquigarrow \sup I = \max I = b$

$I = \ldots, b[\rightsquigarrow \sup I = b$, pas de maximum

$I =]-\infty, \ldots \rightsquigarrow$ I n'est pas minoré

$I = \ldots, +\infty[\rightsquigarrow$ I n'est pas majoré

Chapitre 2 Le plan complexe $\mathbb{C}$

§ 2.1 Les nombres complexes et leur représentations

<u>Définition 2.1</u> (Les nombres complexes $z = x+iy$)

On définit le <u>plan complexe</u> par

$$\mathbb{C} = \{ z = x+iy : x, y \in \mathbb{R} \} \quad \text{où} \quad i^2 = -1$$

Si $z = x+iy \in \mathbb{C}$ est tq $x, y \in \mathbb{R}$, on appelle x la <u>partie réelle</u> de z et y la <u>partie imaginaire</u> de z et on écrit

$x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ $\quad z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$
$$= x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Pour finir, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Définition 2-2 (module et conjugué)

Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$,

Le conjugué (complexe) de z noté $\bar{z}$ est défini par

$$\bar{z} = x - iy$$

Le module de z noté $|z|$ est défini par

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

Proposition 2.3

$\forall z = x+iy, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a

(i) $\bar{\bar{z}} = z$

(ii) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(iii) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(iv) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et

$\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

(v) $z \cdot \bar{z} = x^2+y^2 \in \mathbb{R}$ et $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

(vi) $|\bar{z}| = |z|$

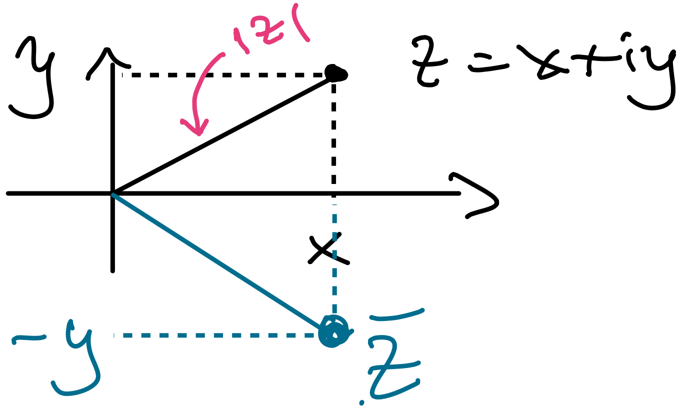
(vii) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

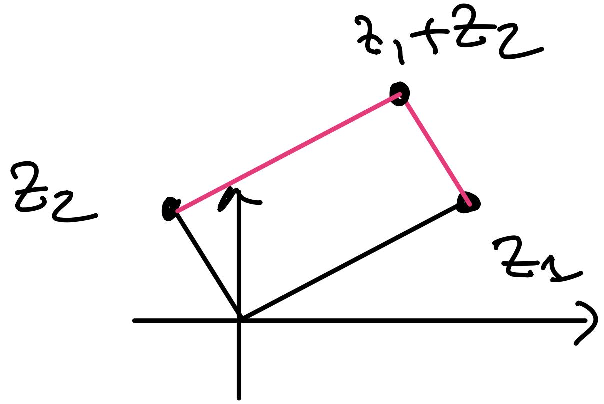
(viii) si $z \neq 0$, $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

(ix) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

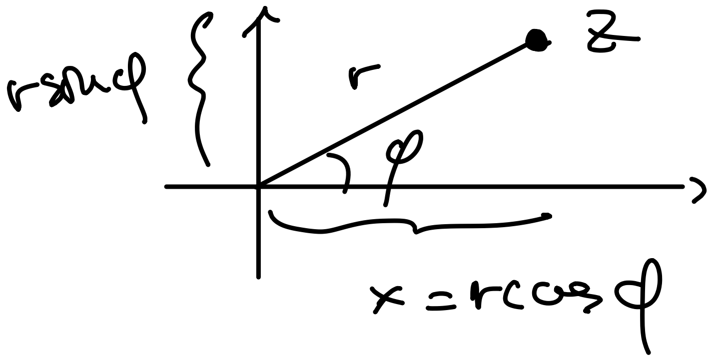
<u>Remarque 2.4</u> Représentation cartésienne

On peut identifier $\mathbb{C}$ comme le plan $\mathbb{R}^2$





Remarque 2.5 Représentation polaire



$$z = r\cos\varphi + i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Ou encore, $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

pour φ une formule est pour $z \neq 0$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{si } x>0,\ y>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x=0,\ y>0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{si } x<0 \text{ et } y\in\mathbb{R} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{si } x=0 \text{ et } y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+2\pi & \text{si } x>0 \text{ et } y<0. \end{cases}$$

où $\varphi \in [0, 2\pi[$

Si $z_1 = r_1(\cos(\varphi_1) + i\sin(\varphi_1))$, $z_2 = r_2(\cos(\varphi_2) + i\sin(\varphi_2))$

alors, $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right)$

<u>Définition 2.6</u> (argument)

Pour $z \in \mathbb{C}$, si $\varphi \in \mathbb{R}$ est tq

$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, on dit que φ est un

<u>argument</u> de z et on note $\varphi = \arg(z)$

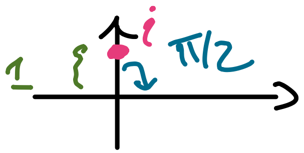
<u>Remarque 2.7</u> :

(i) Pour tout nombre complexe, un argument existe

(ii) Pour $z \in \mathbb{C}^*$, l'argument n'est défini qu'à un multiple de 2π près. Pour $z = 0$, n'importe quel $\varphi \in \mathbb{R}$ est un argument.

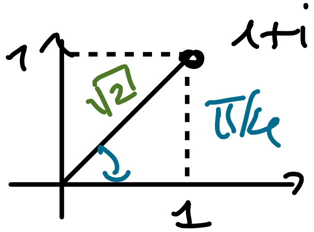
Exemples 2.8

(i) $z = i = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ $\Rightarrow$ $\pi/2$ est un argument de i



$|i| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

(ii) $z = 1+i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$



$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$